

(10)

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΟΥ #61) Οα ηρέρει $\text{ord}_{11}(2) \mid 10 \Rightarrow \text{ord}_{11}(2) = 1, 2, 5, 10$

$$2^1, 2^2=4, 2^5=2(2^2)^2=2 \cdot 4^2=2 \cdot 16=2 \cdot 5 \pmod{11}$$

$$2^5 \equiv 10 \pmod{11} \equiv (11-1) \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$$

Άρα, $\text{ord}_{11}(2) = 10 \Rightarrow 2$ ηωωωωωωω ωίω.Οα ηρέρει $\text{ord}_{17}(3) \mid 16 \Rightarrow \text{ord}_{17}(3) = 1, 2, 4, 8, 16$

$$3^1, 3^2=9, 3^4=9^2=81 \equiv (-4) \pmod{17}$$

$$3^8 \equiv (3^4)^2 \equiv (-4)^2 \pmod{17} \equiv 16 \pmod{17} \equiv (17-1) \pmod{17} \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 3^{16} = (3^8)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{17}$$

 $\text{ord}_{17}(3) = 16 \Rightarrow 3$ ηωωωωωωω ωίω.

$$8^{9(11)} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 8^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow \text{Ζωωωωωωω ωωω ωωωωωωωω}$$

$$8^{2015} = 8^{201 \cdot 10} \cdot 8^5 = (8^{10})^{201} \cdot 8^5 \equiv 8^5 \pmod{11} \equiv (2^3)^5 \pmod{11}$$

Άλλα, $\text{ord}_{11}(2) = 10$ ωίω:

$$2^{15} = 2^{10} \cdot 2^5 \equiv 1 \cdot 2^5 \pmod{11}$$

$$\text{Έρω}, \text{ord}_{11}(2^5) = 2 \leftarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (2^5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$$

2) $3x \equiv 7 \pmod{17}$ α) Έχω ζωωωω; $\leftarrow$ ΝΑΙ ΔΙΟΤΙ $(3, 17) = 1 \mid 7$ β) Ηωωωωωω; $\leftarrow$ ΝΑΙ $(3, 17) = 1$

(Έρω ωίω, ζωωωωωωωωωωω)

$$\text{Πρέρ} \quad 3^{-1} \equiv c \pmod{17}$$

$$3^{-1} \equiv 3^{16-1} \pmod{17} \equiv 3^{15} \pmod{17} \equiv -1 \pmod{17}$$

ζωωω

$$3^{-1} \cdot 3x \equiv 3^{-1} \cdot 7 \pmod{17}$$

$$x \equiv 3^{15} \cdot 3^2 \pmod{17} \equiv 3^{(15+2) \pmod{17}}$$

(Πάωωω ζω ωίω ωίω ωίω)

$$3^{22} = 3^{16+6} \equiv 3^{16} \cdot 3^6 \pmod{17} \equiv 1 \cdot 3^6 \pmod{17})$$

$$8X \equiv 3 \pmod{11}$$

$$8 = 2^3, \text{ 2 πρωταρχικά π.11 mod 11}$$

$$(8, 11) = 1 \mid 3 \rightarrow \text{Εχουμε μοναδική λύση}$$

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot x &\equiv 3 \pmod{11} \\ 3 &\equiv 2^9 \pmod{11} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2^{-3} \cdot 2^3 x &\equiv 2^{-3} \cdot 2^9 \pmod{11} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &\equiv 2^7 \cdot 2^9 \pmod{11} \equiv 2^{(7+9) \pmod{10}} \pmod{11} \end{aligned}$$

3) Στο φώταο

$$\begin{aligned} 4) a) a=; \text{ ώστε } x &\equiv 1 \pmod{2} \rightarrow x = 2k+1 \text{ περιττός} \\ x &\equiv 1 \pmod{4} \rightarrow x = 4k+1 \text{ περιττός} \end{aligned}$$

Τότε θα προκύπτει για κάποιο συνδυασμό συνυψίσεως

$$x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow x \in \{1, 1 \pm 2, 1 \pm 4, 1 \pm 6, \dots\} = A$$

$$x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow x \in \{1, 1 \pm 4, 1 \pm 8, \dots\} = B$$

$$\text{ώστε } A \cap B = B \text{ διότι } B \subseteq A.$$

Συνεπώς θα χρειαστεί να λύσει μόνο $m \cdot 2^k$

B) Βρείτε $x \in \mathbb{Z}$ με

$$x \equiv 3 \pmod{10}$$

$$x \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\text{Εχουμε λύση } (6, 10) \mid |3-5| = 2 \text{ Ναι}$$

(Δεν μπορούμε να παρούμε κινέζο γιατί $(10, 6) = 2 \neq 1$)

$$x \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow x = 10k + 3 \quad (1)$$

$$\text{Αντικαθιστούμε στην } x \equiv 5 \pmod{6}$$

$$3 + 10k \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow 10k \equiv 2 \pmod{6} \quad (1)$$

$$\text{Εχουμε λύση, διότι } (6, 10) = 2 \mid 2$$

$$(1) \Rightarrow 5k \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2k \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2k \equiv 2 \cdot 1 \pmod{3} \Rightarrow 4k \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k = 2 + 3\lambda \quad (2)$$

Για $k=2$ έχουμε μια λύση για το x των $x=23$

$$\text{Υποδοκιμες } x \equiv 23 \pmod{[6, 10]} \equiv 23 \pmod{30}$$

$$(1) \& (2) \text{ τότε } x = 3 + 10(2 + 3\lambda) = 23 + 30\lambda$$

$$\Delta \chi_1: \quad x \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$$x \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 5 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\text{Αρα, } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 3 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Μπορεί να λυθεί} \\ \text{από θεωρητικά κριτήρια} \\ M = [2, 5, 3] = 30 \end{array} \right.$$

$$\text{Βρες: } C_1: \frac{M}{2} C_1 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 15 C_1 \equiv 1 \pmod{2} \\ C_1 = 1$$

$$C_2: \frac{M}{5} C_2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6 C_2 \equiv 1 \pmod{5} \\ C_2 = 1$$

$$C_3: \frac{M}{3} C_3 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 10 C_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ C_3 = 1$$

$$x \equiv \left(\frac{M}{2} C_1 \cdot 1 + \frac{M}{5} C_2 \cdot 3 + \frac{M}{3} C_3 \cdot 2 \right) \pmod{30} \equiv (15 + 18 + 20) \pmod{30} \equiv \\ \equiv 23 \pmod{30}$$

$$8) \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Επ'αυ 3, 5, 7 είναι μικρά} \\ \text{να εφαρμόσουμε το θεωρητικό} \\ \text{των κριτηρίων} \end{array} \right.$$

$$\text{Βρες: } C_1 \text{ με: } \frac{105}{3} C_1 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 35 C_1 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 C_1 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow C_1 = 2$$

$$C_2 \text{ με: } \frac{105}{5} C_2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 21 C_2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$C_3 \text{ με: } \frac{105}{7} C_3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 15 C_3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x \equiv \left(\frac{105}{3} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{105}{3} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{105}{7} \cdot 1 \cdot 2 \right) \bmod 105 \equiv$$

$$\equiv (140 + 63 + 30) \bmod 105 \equiv 23 \bmod 105$$

$$\begin{array}{l|l} 8) & \begin{array}{l} 5x \equiv 3 \bmod 7 \\ 4x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \end{array} \\ & \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot 5 x \equiv 3 \cdot 3 \bmod 17 \Rightarrow x \equiv 2 \bmod 7 \\ 4 \cdot 4 x \equiv 4 \cdot 2 \bmod 5 \Rightarrow x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \end{array} \end{array}$$